

3. Számrendszerek, logikai műveletek

- Tízés, kettes, tizenhatos számrendszerek
- Átváltás a kettes és tizenhatos számrendszerek között
- Bináris számábrázolás előnyei
- Kijelentés, logikai érték
- Logikai műveletek (Boole algebra): tagadás, és, vagy, kizáró vagy (igazságtáblák)
- Logikai műveletek megvalósítása áramkörökkel, reléekkel

A **kettes vagy bináris számrendszer két számjegy, a 0 és az 1** segítségével ábrázolja a számokat. Mivel digitális áramkörökben a számrendszerek közül a kettest a legegyszerűbb megvalósítani, a modern számítógépekben és gyakorlatilag bármely olyan elektronikus eszközben, amely valamilyen számításokat végez, szinte kivétel nélkül ezt használják.

Tízés (decimális) számrendszer

A tízes számrendszer a leggyakrabban alkalmazott számrendszer. 10 db számjegyet alkalmaz. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Tízés számrendszerből kettes számrendszerbe történő átszámítás során a tízes számrendszerbeli számot mindig osztjuk 2-vel.

Pl:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 1 \\ 9 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \uparrow$$

10011 = 19

Tehát a $19_{10} = 10011_2$

Másik példa, kicsit másképpen:

$$\begin{array}{r} 41 : 2 = 20 \text{ marad } 1 \\ 20 : 2 = 10 \text{ marad } 0 \\ 10 : 2 = 5 \text{ marad } 0 \\ 5 : 2 = 2 \text{ marad } 1 \\ 2 : 2 = 1 \text{ marad } 0 \\ 1 : 2 = 0 \text{ marad } 1 \end{array} \uparrow$$

Addig osztunk, amíg az osztás eredménye 0 nem lesz.

Így $41_{10} = 101001_2$.

A kettes (bináris) számrendszer

A kettes számrendszerben az alapszám a 2, tehát két számjegy van értelmezve 1 és a 0. A t HA egy kettes számrendszerbeli számot át akarunk írni tízes számrendszerbe akkor az egyes helyiértékeken lévő bináris számjegyeket megszorozzuk a kettőnek helyiértékből adódó hatványával.

Tehát: az 10011 bináris szám átszámítása tízes számrendszerbe:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 19 \\ 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 19 \end{array}$$

Másik példa:

$$1010011011_2 = 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 512 + 128 + 16 + 8 + 2 + 1 = 667$$

Törtszámok

Törtszámoknál is hasonlóképp járunk el mint az egész számoknál, de törteknél kettőnek a negatív kitevős hatványával kell szorozni.

Pl.: 0.1011 esetén

$$0.1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 0.6875$$

Összeadás szorzás kettes számrendszerben

A számítógép mindenfajta műveletet el tud végezni összeadás és szorzás segítségével.

Az összeadás műveleti szabályai:

$$1+1=0 \text{ átvitel}=1$$

$$1+0=1 \text{ átvitel}=0$$

$$0+1=1 \text{ átvitel}=0$$

$$0+0=0 \text{ átvitel}=0$$

Az eredményt a számoszlop alá írjuk, az átvitelt a következő oszlophoz adjuk.

Összeadás	Példa
$0 + 0 = 0$	1011_2
$0 + 1 = 1$	$+ \quad 11_2$
$1 + 0 = 1$	<hr/>
$1 + 1 = 10$	1110_2

Legyen a két összeadandó szám 1001 (9) és 1110 (14).

$$\begin{array}{r}
 1001\ 9 \\
 + 1110\ 14 \\
 \hline
 10111\ 23
 \end{array}$$

A szorzás műveleti szabályai:

$$1*1=1$$

$$0*0=0$$

$$1*0=0$$

$$0*1=0$$

Legyen a két összeszorozandó szám a 1001 (9) és 1110 (14).

1001 * 1110
1001
1001
1001
0000
1111110

Tizenhatos (hexadecimális) számrendszer

A tizenhatos számrendszerben 16 számjegy van: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

A betűk értékei:

$$A=10$$

$$B=11$$

$$C=12$$

$$D=13$$

$$E=14$$

$$F=15$$

Tizes számrendszerbeli számot hasonló módon számítjuk át, mint egy bináris számot decimális számrendszerbe.

Az adott számot mindig osztjuk 16-tal.

Tehát:

$ \begin{array}{r} 183 \overline{) 16} \\ 11 \overline{) 7} \\ 0 \overline{) 11} \end{array} $	$ \begin{array}{l} 11=B \quad 7=7 \\ B7=183 \end{array} $
--	--

vagyis

$$183:16=11, \text{ marad } 7$$

$$11:16=0, \text{ marad } 11$$

Addig folytatjuk, amíg az osztás eredménye 0 nem lesz.

..és alulról felfelé olvasva kapjuk a B7-et, tehát

$$183_{10}=B7_H$$

Másik módszer: a 183-at átváltjuk 2-esbe, a többit lásd lennebb.

Átváltás kettes és tizenhatos számrendszer között

Ehhez a következő konverziós táblázatot alkalmazzuk:

Tíz-es	Kettes	Hexa
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Az átváltás menete: Legyen a szám 1011110101101010010_2 . A számot jobbról balra négyes csoportokra osztjuk, így:

101	1110	1011	0101	0010
-----	------	------	------	------

A legbaloldali csoport csak 3 bitet tartalmaz. Ezt kiegészítjük balról egy 0-val:

0101	1110	1011	0101	0010
------	------	------	------	------

Az így kialakított bitnégyeseket **tetrád**oknak nevezzük. A konverziós tábla alapján 0101 nek a hexa oszlopban az **5** felel meg. Az 1110 tetrádnak az **E**, stb.

Tehát:

$$\begin{aligned} 1011110101101010010_2 &= 0101 \ 1110 \ 1011 \ 0101 \ 0010_2 \\ &= 5 \ E \ B \ 5 \ 2_{16} \\ &= 5EB5_{16} \end{aligned}$$

A kettes számrendszer előnyei

Digitális áramkörökben a számrendszerek közül a kettest a legegyszerűbb megvalósítani, ezért a modern számítógépekben és gyakorlatilag bármely olyan elektronikus eszközben, amely valamilyen számításokat végez, szinte kivétel nélkül ezt használják.

Könnyen megvalósíthatók segítségével a logikai műveletek.

Mint fentebb látható, az összeadás és a szorzás ebben a számrendszerben a legegyszerűbb.

Logikai műveletek

Ítélet:

Olyan állítás, kijelentés, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy **igaz** vagy **hamis**.

Minden ítélethez logikai értéket rendelhetünk:

- **HAMIS**, amelyet kettes számrendszerben **0**-val kódolunk.
- **IGAZ**, amelyet kettes számrendszerben **1**-gyel kódolunk.

Így tehát HAMIS<IGAZ

A ítéleteket általában a latin ábécé nagy betűivel jelöljük. Pl. NOT A az A ítélet tagadását jelenti.

Műveletek

Tagadás:

HAMIS logikai érték esetén IGAZat, IGAZ esetén HAMISat ad:

Jelölés: **NOT A**

Egy bemenete van, tehát egy ítéletre hat.

Igazságtáblázat:

Be	Ki
A	NOT A
0	1
1	0

És

Két bemenete van, tehát két ítéletet kapcsol össze. Csak akkor ad igazat, ha mindkét bemenet igaz

Jelölés: **A AND B**

Igazságtáblázat:

Be ₁	Be ₂	Ki
A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VAGY

Két bemenete van, tehát két ítéletet kapcsol össze. Csak akkor ad igazat, ha legalább az egyik bemenet igaz

Jelölés: **A OR B**

Igazságtáblázat:

Be ₁	Be ₂	Ki
A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1

1	0	1
1	1	1

KIZÁRÓ VAGY

Két bemenete van, tehát két ítéletet kapcsol össze. Csak akkor ad igazat, ha a bemenetek különbözőek

Jelölés: **A XOR B**

Igazságtáblázat:

Be ₁	Be ₂	Ki
A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EKVIVALENCIA

A XOR művelet tagadása

Két bemenete van, tehát két ítéletet kapcsol össze. Csak akkor ad igazat, ha **mindkét bemenet egyforma.**

EQ=NOT XOR

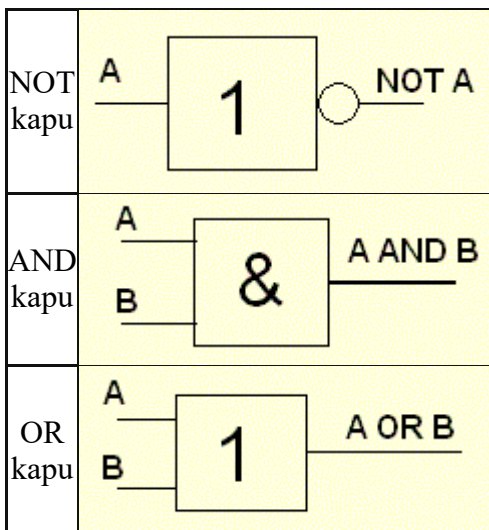
Jelölés: **A EQ B**

Igazságtáblázat:

Be ₁	Be ₂	Ki
A	B	A EQ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

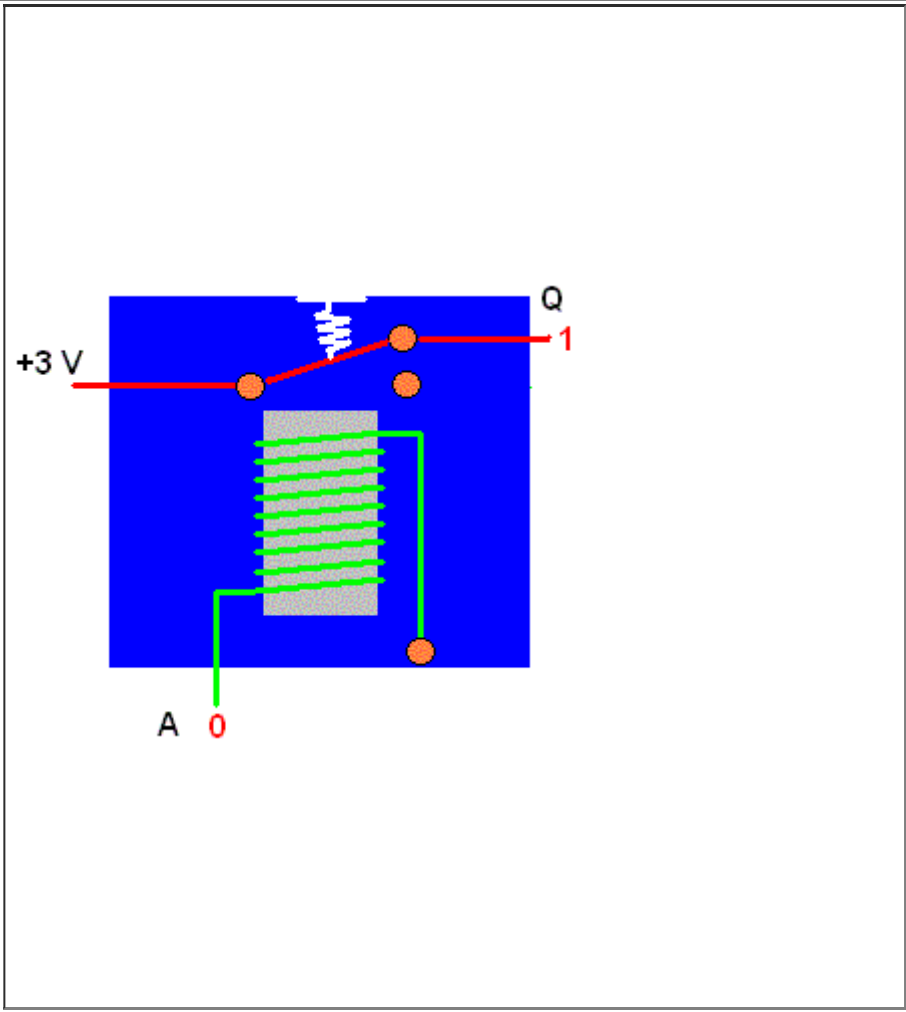
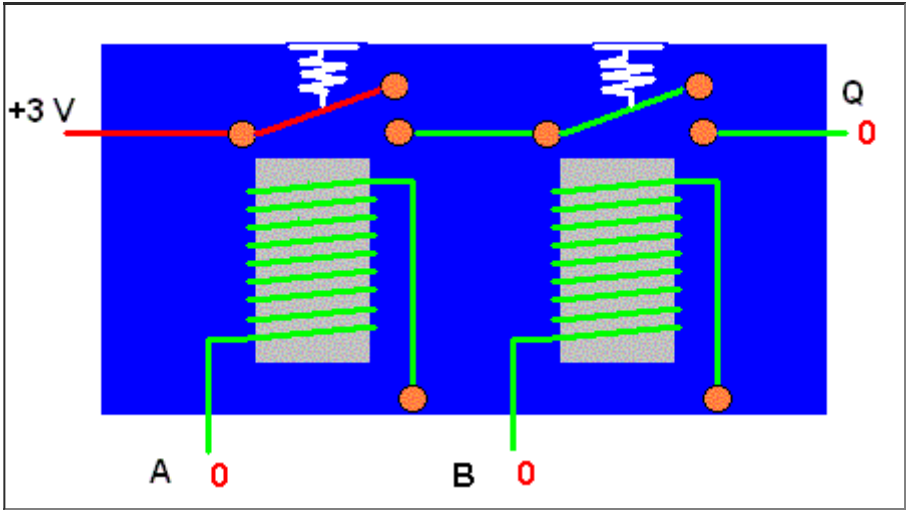
Minden logikai művelet megvalósítható logikai áramkörként, és az egyes logikai áramkörök megfelelő összekapcsolásával matematikai műveletek is megvalósíthatók.

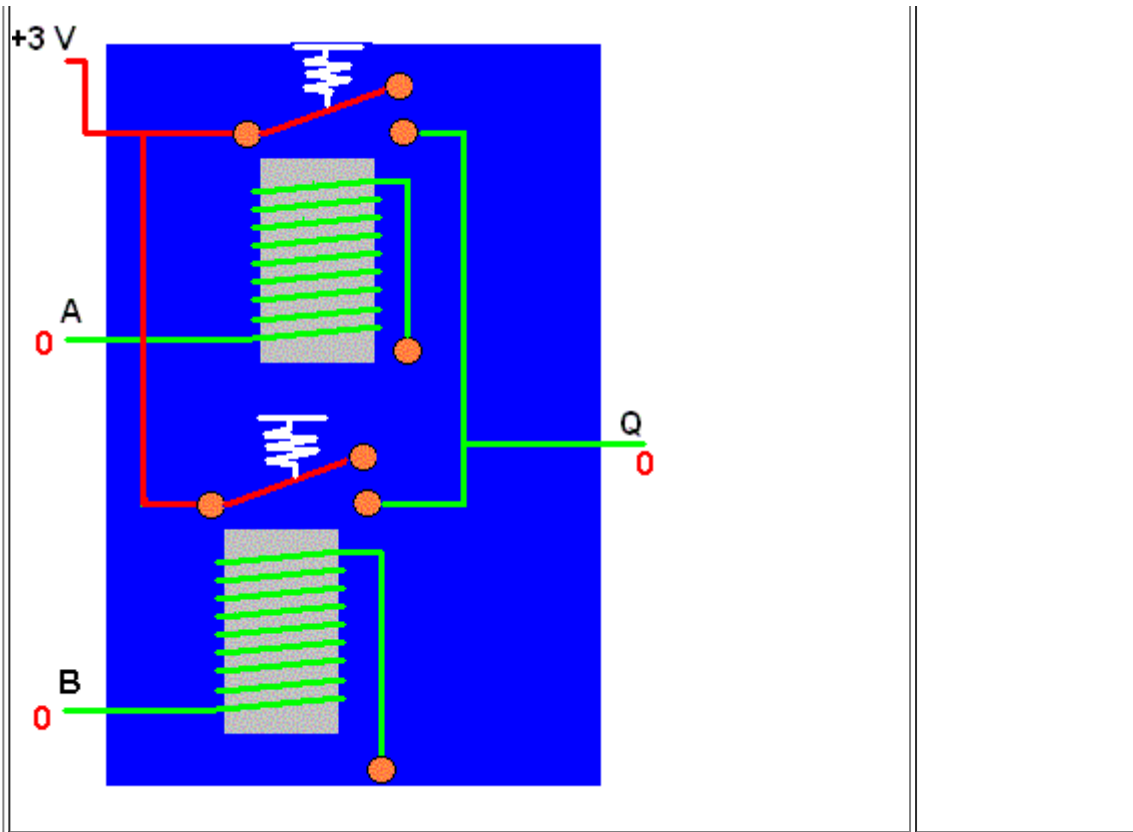
A logikai műveleteket megvalósító logikai áramkörökre (kapukra) a következő jelölést használják



A logikai műveletek megvalósíthatók reléekkel is, ezek működése átláthatóbb.

A tagadás (NOT)

 <p>The diagram shows a blue PCB with a single relay. A red wire labeled '+3 V' is connected to the top-left terminal of the relay's switch mechanism. A green wire labeled 'A 0' is connected to the bottom-left terminal of the relay's coil. The top-right terminal of the switch is connected to a red wire labeled 'Q 1'. The bottom-right terminal of the coil is connected to a common ground point. The relay's arm is shown in the closed position, connecting the +3V source to the output Q.</p>	<p>Tagadás (NOT)</p> <p>Az A bemenetre ha áramot kapcsolunk (1), az elektromágnes magához rántja a kapcsolóra erősített acéllemezt, így az áramkör megszakad, és a Q kimeneten nem lesz áram (0).</p> <p>Ha az A bemeneten nincs áram (0), a rugó visszahúzza a kapcsolót, és a Q kimeneten a 3 V feszültség újra megjelenik (1).</p> <p>Tehát 0-ra 1-et, 1-re 0-t ad.</p>
 <p>The diagram shows a blue PCB with two relays. A red wire labeled '+3 V' is connected to the top-left terminal of the first relay's switch. A green wire labeled 'A 0' is connected to the bottom-left terminal of the first relay's coil. The top-right terminal of the first relay's switch is connected to the top-left terminal of the second relay's switch. A green wire labeled 'B 0' is connected to the bottom-left terminal of the second relay's coil. The top-right terminal of the second relay's switch is connected to a red wire labeled 'Q 0'. The bottom-right terminal of the second relay's coil is connected to a common ground point. Both relays' arms are shown in the closed position, connecting the +3V source through both relays to the output Q.</p>	<p>Az ÉS (AND) áramkör</p> <p>Csak akkor észlelünk feszültséget, ha az A és B relékre áramot adunk, és az elektromágnesek bekapcsolják egyszerre mind a két kapcsolót</p>
	<p>A VAGY (OR) áramkör</p> <p>Itt elég ha az egyik relé bekapcsol, máris van 1-es a Q kimeneten...</p>



A mai áramkörökben a relék szerepét tranzisztorok töltik be. Ezek sokkal gyorsabbak és nagyon-nagyon ritkán hibásodnak meg.